$\sqrt{f(x)}$

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Torseur

6

1 – Préambule

Le torseur est une entité mathématique qui a été élaborer pour satisfaire les mécaniciens dans les études qu'ils ont à mener sur les solides indéformables. Dans ce contexte, le torseur permet notamment de décrire (on dit aussi « modéliser ») le **mouvement** d'un solide et les **actions mécaniques** qu'il subit. Le mécanicien, dans ses travaux, travaille avec des torseurs *statique*, *cinématique*, *cinétique*, *dynamique*.

Quel que soit l'usage qui en est fait, les torseurs répondent tous aux mêmes règles de calcul.

2 – Écriture - Éléments de réduction

Un torseur $\{\,T\,\}$ s'écrit en un point de l'espace, le point A par exemple. Un torseur est déterminé à l'aide de deux vecteurs devant être exprimés dans un même repère $\mathfrak{R}$:

⇒ Une vecteur **résultante** $\vec{A}$,
indépendant du centre de réduction A.
On dit qu'il est **INVARIANT**.

⇒ Un vecteur **moment** en A $\overrightarrow{M_A}$ du vecteur $\vec{A}$,
dépendant du centre de réduction A.

Un torseur peut être écrit de trois manières différentes :

- ✓ Condensée avec simplement son nom entre { … }.
- ✓ Un peu détaillée avec les éléments de réduction.
- ✓ Très détaillée avec les composantes des vecteurs.

$\vec{A}$ et $\overrightarrow{M_A}$ s'appellent les « éléments de réduction » du torseur $\{T\}$.
X_A ; Y_A ; Z_A ; L_A ; M_A ; N_A s'appellent les coordonnées plückériennes (inventée par Julius Plücker).

Écriture Condensée	Écriture avec éléments de réduction $\vec{A}$ et $\overrightarrow{M_A}$	Écriture avec les composantes des éléments de réduction

Résultante

Composantes de résultante

$$\left\{\,T\,\right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{A} \\ \\ \overrightarrow{M_A} \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{cc} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}}$$

Centre de réduction

Moment résultant

Repère de projection

Composantes du moment

3 – Torseurs particuliers

Torseur nul :

la résultante et le moment sont nuls : $\vec{A} = \vec{0}$ $\quad \overrightarrow{M_A} = \vec{0}$

$$\left\{\,T\,\right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}}$$

Propriété : **INVARIANT** quel que soit le centre de réduction.
L'expression des composantes ne varie pas en fonction du centre de réduction.

Torseur glisseur :

le moment est nul en un point : $\vec{A} \neq \vec{0}$ $\quad \overrightarrow{M_A} = \vec{0}$

$$\left\{\,T\,\right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{A} \\ \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}}$$

Propriété : **INVARIANT** uniquement sur n'importe centre de réduction pris sur la **direction** de la **résultante**.
On dit que le torseur peut « glisser » sur la direction de la résultante, d'où son nom.

Torseur couple :

la résultante est nulle : $\vec{A} = \vec{0}$ $\quad \overrightarrow{M_A} \neq \vec{0}$

$$\left\{\,T\,\right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \\ \overrightarrow{M_A} \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}} = {}_A\left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ 0 & N_A \end{array} \right\}_{\mathfrak{R}}$$

Propriété : **INVARIANT** quel que soit le centre de réduction.
L'expression des composantes ne varie pas en fonction du centre de réduction.

4 – Transport de torseurs

Un torseur peut être réduit (ou transporté) d'un point de l'espace à un autre. La résultante étant indépendante du centre de réduction, elle est un invariante (Son expression est toujours la même, quel que soit le centre de réduction). Le moment, quant à lui, change en général. Il faut donc le calculer.

Soit $\{ T \}$ un torseur et A et B deux points de l'espace. On a :

$$\left\{ T \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} \vec{A} \\ \vec{M_A} \end{matrix} \right\}_{\Re} = {}_A\left\{ \begin{matrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix} \right\}_{\Re} \qquad \left\{ T \right\} = {}_B\left\{ \begin{matrix} \vec{A} \\ \vec{M_B} \end{matrix} \right\}_{\Re} = {}_A\left\{ \begin{matrix} X_A & L_B \\ Y_A & M_B \\ Z_A & N_B \end{matrix} \right\}_{\Re} \qquad \vec{BA} = {}_{\Re}\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right.$$

On calcule l'expression du torseur $\{ T \}$ en avec la relation suivante :

le $\wedge$ indique un produit vectoriel.

Attention à **l'ordre des termes** car le produit vectoriel est **anticommutatif**.

$$\left\{ T \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} \vec{A} \\ \vec{M_A} \end{matrix} \right\}_{\Re} = {}_B\left\{ \begin{matrix} \vec{A} \\ \vec{M_B} = \vec{M_A} + \vec{BA} \wedge \vec{A} \end{matrix} \right\}_{\Re} = {}_B\left\{ \begin{matrix} X_A & L_A + a.Z_A - c.Y_A \\ Y_A & M_A + c.X_A - a.Z_A \\ Z_A & N_A + a.Y_A - b.X_A \end{matrix} \right\}_{\Re}$$

Détail du calcul :

Moment en B $=$ Moment existant en A $+$ Moment en B résultant de la force recherché à calculer en premier

$$\vec{M_B} = \vec{M_A} + \vec{M_B(\vec{A})}$$

$$\vec{M_B} = \vec{M_A} + \vec{BA} \wedge \vec{A}$$

Composantes à droite dans le $\{ T \}$ — Distance 3D entre B et A ! Attention à l'ordre **B** -> **A** — Composantes à gauche dans le $\{ T \}$

$$\vec{M_B} = \left| \begin{matrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{matrix} \right. + \left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ a \end{matrix} \right. \wedge \left| \begin{matrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_A \end{matrix} \right.$$

On ré-écrit la ligne en x !
Pas obligatoire mais pratique !

$$= \left| \begin{matrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{matrix} \right. + \left| \begin{matrix} b.Z_A - c.Y_A \\ c.X_A - a.Z_A \\ a.Y_A - b.X_A \end{matrix} \right.$$

5 – Somme de torseurs

*L'addition de torseurs n'est possible que s'ils sont **TOUS réduits au même point** ET dans le même repère. Si tel n'est pas le cas, alors il faut préalablement les transporter au même point et les ramener dans le même repère.*

Soit $\{ T1 \}$ et $\{ T2 \}$ deux torseurs réduits tous les deux au point C.
La Torseur somme est :

$$\left\{ S \right\} = {}_C\left\{ T_1 \right\}_{\Re} + {}_C\left\{ T_1 \right\}_{\Re} = {}_C\left\{ \begin{matrix} \vec{R_1} \\ \vec{M_{1C}} \end{matrix} \right\}_{\Re} + {}_C\left\{ \begin{matrix} \vec{R_2} \\ \vec{M_{2C}} \end{matrix} \right\}_{\Re} = {}_C\left\{ \begin{matrix} \vec{R_1} + \vec{R_2} \\ \vec{M_{1C}} + \vec{M_{2C}} \end{matrix} \right\}_{\Re} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{R_S} = \vec{R_1} + \vec{R_2} \\ \vec{M_C(\vec{R_S})} = \vec{M_{1C}} + \vec{M_{2C}} \end{matrix}$$

6 – Comoment de torseurs

Les notations utilisées ici sont volontairement celles du mécanicien.

Soit un torseur d'effort et un torseur cinématique, tous deux réduit en C.

$$_C\left\{ T_{effort} \right\}_{\Re} = {}_C\left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{C} \end{matrix} \right\}_{\Re} \quad \text{et} \quad {}_C\left\{ T_{ciném.} \right\}_{\Re} = {}_C\left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega_{S/R}} \\ \vec{V_{C \in S/R}} \end{matrix} \right\}_{\Re}$$

Le **comoment** des deux torseurs est le **scalaire** (le nombre) $\boldsymbol{P}$ tel que :

$$\boldsymbol{P} = {}_C\left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{C} \end{matrix} \right\}_{\Re} \otimes {}_C\left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega_{S/R}} \\ \vec{V_{C \in S/R}} \end{matrix} \right\}_{\Re} = \vec{F} \cdot \vec{V_{C \in S/R}} + \vec{C} \cdot \vec{\Omega_{S/R}}$$

Explication sur les opérateurs :

⇒ Le symbole $\otimes$ est celui de l'opérateur indiquant le calcul du comoment de deux torseurs.

⇒ Le symbole $\cdot$ est celui du produit scalaire de deux vecteurs.

Le mécanicien averti reconnaitra ici les formules de puissance mécanique : $P = \vec{F} \cdot \vec{V}$ et $P = C \cdot \omega$.